

基于语言偏好信息的满意公平稳定双边匹配方法

张 笛, 朱帮助

(南京信息工程大学 商学院, 南京 210044)

摘 要 针对语言偏好信息下的双边匹配问题, 提出一种考虑匹配满意性、公平性和稳定性的双边匹配方法. 首先, 通过构造匹配满意度计算规则, 将双边主体的语言偏好信息转化为匹配满意度; 然后, 给出满意匹配、公平匹配和稳定匹配的定义, 在此基础上, 考虑稳定匹配约束条件, 建立双边匹配多目标优化模型, 采用理想点法将多目标优化模型转化为单目标规划模型进行求解; 最后, 通过一个算例验证了提出方法的可行性和有效性.

关键词 双边匹配; 语言偏好; 满意匹配; 公平匹配; 稳定匹配

Satisfied, fair and stable two-sided matching method based on linguistic preference information

ZHANG Di, ZHU Bangzhu

(Business School, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract A two-sided matching method considering satisfaction, fairness and stability of the matching is proposed to solve two-sided matching problems with linguistic preference information. Firstly, linguistic preference information of agents on both sides are transformed into matching satisfaction degree by developing the calculating rules of matching satisfaction degree. Secondly, concepts on satisfaction, fairness and stability of the matching are given. Furthermore, considering the stable matching constraint condition, a multiple objective optimization two-sided matching model is constructed. Then, the ideal point method is used to convert the multiple objective optimization model into a single objective programming model, which produces the two-sided matching results. Finally, an example is given to prove the feasibility and validity of the proposed method.

Keywords two-sided matching; linguistic preference; satisfied matching; fair matching; stable matching

1 引言

双边匹配是指对两互不相交集合中不可分的离散资源进行配对或分配问题, 具有广泛的应用背景. 现实生活中双边匹配问题普遍存在, 如: 青年男女婚姻匹配问题^[1]、学校与学生匹配问题^[2]、求职人员与企业岗位匹配问题^[3]、风险投资匹配问题^[4]、买卖交易匹配问题^[5]以及知识服务供需匹配问题^[6,7]等. 因此, 双边匹配问题研究具有重要的理论意义和应用价值.

基于偏好序的双边匹配问题及其拓展问题一直是学者们研究的重点^[8-15]. 针对严格完全偏好序下的双边匹配问题, Gale 等^[8]证明了稳定匹配的存在性, 并提出一对一稳定匹配的延迟接受 Gale-Shapley 算法, 奠定了双边匹配的理论基石. Roth^[9]在 Gale-Shapley 算法的基础上, 提出一对多稳定匹配的 Hospital-Re-

收稿日期: 2018-01-23

作者简介: 张笛 (1987-), 男, 安徽蚌埠人, 博士, 讲师, 研究方向: 管理决策分析, E-mail: bengbuzhangdi@163.com; 朱帮助 (1979-), 男, 江苏宿迁人, 博士, 教授, 研究方向: 能源经济与管理, E-mail: wpzbz@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金 (71471087, 71573115)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71471087, 71573115)

中文引用格式: 张笛, 朱帮助. 基于语言偏好信息的满意公平稳定双边匹配方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(9): 2412-2420.

英文引用格式: Zhang D, Zhu B Z. Satisfied, fair and stable two-sided matching method based on linguistic preference information[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(9): 2412-2420.

sident 算法,并将双边匹配理论引入市场机制设计实践.樊治平等^[10]建立基于最高可接受偏好序的满意双边匹配模型.由于匹配主体知识和经验的局限性以及匹配信息的不完全不确定性^[11,13,14],匹配主体往往难以给出严格完全偏好序信息,而给出弱偏好序信息^[11]、无差异偏好序信息^[12]、不完全偏好序信息^[13]和不确定偏好序信息^[14,15]等.梁海明等^[11]构建基于强偏好序、弱偏好序、无差异偏好序和未知偏好序信息的多满意稳定匹配优化模型.Erdil等^[12]研究了无差异偏好序信息下双边匹配的稳定性与帕累托有效性.乐琦等^[13]构建基于不完全偏好序信息的满意匹配优化模型.针对不确定偏好序信息下的双边匹配问题:姜艳萍等^[14]建立基于可能度的弱稳定、 α 稳定、强稳定和超稳定的双边匹配模型;Fan等^[15]提出一种基于失望理论的满意双边匹配方法.

已有文献丰富、发展和完善了双边匹配理论,同时也拓展了双边匹配的应用范围.由于匹配环境的复杂性、匹配信息的不确定性以及人类思维的模糊性,在实际匹配决策中,匹配主体会使用最为熟悉的自然语言来表达决策偏好^[16-19],即双边主体会给出自然语言形式的偏好信息.基于语言偏好信息的双边匹配问题广泛存在于实际生活中,但具有针对性的双边匹配方法还不多见.例如,在婚姻匹配中,一方主体对另一方主体进行综合评价时,往往会给出“优”、“良”、“中”、“差”等形式的自然语言偏好信息.因此,如何解决基于语言偏好信息的双边匹配问题具有学术研究价值和现实意义.

目前,基于语言偏好信息的双边匹配问题引起了学者们的关注^[16-19].乐琦^[16]针对语言偏好信息下的双边匹配问题,考虑双边匹配的满意性,提出一种基于二元语义的满意双边匹配方法.Yue等^[17-19]将文献^[16]的方法拓展至不确定语言偏好^[17]、不确定不完全语言偏好^[18,19]的情形,分别建立基于二元语义的满意匹配优化模型.上述文献为解决语言偏好信息下的双边匹配问题提供了借鉴思路和方法支撑,但需要指出的是,现有语言偏好信息下的双边匹配方法大多是基于匹配的满意性视角,构建双边匹配模型,极少考虑匹配的公平性和稳定性.若单纯考虑匹配的满意性而忽视匹配的公平性和稳定性,则可能导致某些匹配主体放弃已有的匹配对象,从而使原匹配方案失效.综合考虑匹配的满意性、公平性和稳定性的双边匹配方法的研究尚未报道.在双边匹配中,匹配的满意性、公平性和稳定性具有重要的意义和作用^[8,10,14,20].匹配的满意性、公平性和稳定性是衡量双边方案优劣的重要依据,且与匹配主体对匹配结果的满意程度密切相关.因此,本文针对语言偏好信息下的双边匹配问题,考虑匹配的满意性、公平性和稳定性,提出一种满意公平稳定双边匹配方法.

2 预备知识与问题描述

2.1 预备知识

定义 1^[21] 称 $S = \{s_\kappa | \kappa = 0, 1, \dots, \tau\}$ 为语言术语集,其中, τ 为偶数,且对 $\forall s_{\kappa_1}, s_{\kappa_2} \in S$ 满足条件: (i) 当 $\kappa_1 > \kappa_2$ 时,则 $s_{\kappa_1} > s_{\kappa_2}$; (ii) 存在负算子 Neg: 当 $\kappa_1 + \kappa_2 = \tau$ 时,则 $\text{Neg}(s_{\kappa_1}) = s_{\kappa_2}$.

在双边匹配问题中,设 X 方主体集为 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, 其中, X_i 表示 X 方中的第 i 个匹配主体, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}, m \geq 2$. Y 方主体集为 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, 其中, Y_j 表示 Y 方中的第 j 个匹配主体, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$.

定义 2^[9,14,15] (一对一双边匹配) 设 $\mu: X \cup Y \rightarrow X \cup Y$ 上的一一映射,且对 $\forall X_i \in X, Y_j \in Y$, 满足条件: (i) $\mu(X_i) \in Y \cup \{X_i\}$; (ii) $\mu(Y_j) \in X \cup \{Y_j\}$; (iii) 若 $\mu(X_i) = Y_j$, 则 $\mu(Y_j) = X_i$; (iv) 若 $\mu(Y_j) = X_i$, 则 $\mu(X_i) = Y_j$; (v) 若对 $\forall j, j' \in J, j \neq j', \mu(X_i) = Y_j$, 则 $\mu(X_i) \neq Y_{j'}$; (vi) 若对 $\forall i, i' \in I, i \neq i', \mu(Y_j) = X_i$, 则 $\mu(Y_j) \neq X_{i'}$. 其中, $\mu(X_i) = Y_j$ 或 $\mu(Y_j) = X_i$ 表示 X_i 与 Y_j 在 μ 中匹配,记为 (X_i, Y_j) . 称 (X_i, Y_j) 为双边匹配 μ 中的匹配对.特别地,在双边匹配 μ 中, $\mu(X_i) = X_i$ 表示 X_i 在 μ 中未匹配,类似地, $\mu(Y_j) = Y_j$ 表示 Y_j 在 μ 中未匹配.

2.2 问题描述

考虑语言偏好信息下的一对一双边匹配问题,下面给出双边匹配的基本设置.

设 S 是给定的语言术语集, $R_i = (R_{i1}, R_{i2}, \dots, R_{in})$ ($i \in I$) 是主体 X_i 给出的关于 Y 方主体的严格完全语言偏好向量,其中, R_{ij} ($R_{ij} \in S, i \in I, j \in J$) 表示主体 X_i 给出的关于主体 Y_j 的语言偏好,满足对 $\forall j, j' \in J$, 当 $j \neq j'$ 时,有 $R_{ij} \neq R_{ij'}$, 且 R_{ij} 越大,表明主体 X_i 对主体 Y_j 的满意程度越

大. $T_j = (T_{1j}, T_{2j}, \dots, T_{mj})(j \in J)$ 是主体 Y_j 给出的关于 X 方主体的严格完全语言偏好向量, 其中 T_{ij} ($T_{ij} \in S, i \in I, j \in J$) 表示主体 Y_j 给出的关于主体 X_i 的语言偏好, 满足对 $\forall i, i' \in I$, 当 $i \neq i'$ 时, 有 $T_{ij} \neq T_{i'j}$, 且 T_{ij} 越大, 表明主体 Y_j 对主体 X_i 的满意程度越大.

本文需要解决的问题是: 在考虑匹配的满意性、公平性和稳定性的情形下, 依据双边主体的严格完全语言偏好向量 $R_i (i \in I)$ 和 $T_j (j \in J)$, 建立双边匹配模型, 获得双边匹配方案.

3 匹配满意度

首先将双边主体的语言偏好信息转化为匹配满意度.

设主体 X_i 对主体 Y_j 的匹配满意度为 α_{ij} , 其计算公式为

$$\alpha_{ij} = [(\phi(R_{ij}) + 1)/(\tau + 1)]^{\lambda_i}, i \in I, j \in J, \quad (1)$$

其中, $\phi(R_{ij})$ 是语言术语 R_{ij} 的下标, $(\tau + 1)$ 是语言术语集 S 的粒度, $\lambda_i (\lambda_i > 0)$ 表示主体 X_i 对语言偏好 R_{ij} 关于匹配满意度的敏感程度.

设主体 Y_j 对主体 X_i 的匹配满意度为 β_{ij} , 其计算公式为

$$\beta_{ij} = [(\phi(T_{ij}) + 1)/(\tau + 1)]^{\lambda'_j}, i \in I, j \in J, \quad (2)$$

其中, $\phi(T_{ij})$ 是语言术语 T_{ij} 的下标, $(\tau + 1)$ 是语言术语集 S 的粒度, $\lambda'_j (\lambda'_j > 0)$ 表示主体 Y_j 对语言偏好 T_{ij} 关于匹配满意度的敏感程度.

注 1 若 $\mu(X_i) = X_i$, $\mu(Y_j) = Y_j$, 则 $\alpha_i = 0$, $\beta_j = 0$, 其中, α_i 和 β_j 分别表示主体 X_i 、主体 Y_j 未匹配时的满意度.

容易证明满意度 α_{ij} 和 β_{ij} 满足下列性质:

性质 1 满意度 α_{ij} 与 $\phi(R_{ij})$ 呈正相关关系, 且对 $\forall R_{ij} \in S$, 则 $0 < [1/(\tau + 1)]^{\lambda_i} \leq \alpha_{ij} \leq 1$. 特别地, 当 $R_{ij} = s_0$ 时, $\alpha_{ij} = [1/(\tau + 1)]^{\lambda_i}$, 当 $R_{ij} = s_\tau$ 时, $\alpha_{ij} = 1$.

性质 2 满意度 β_{ij} 与 $\phi(T_{ij})$ 呈正相关关系, 且对 $\forall T_{ij} \in S$, 则 $0 < [1/(\tau + 1)]^{\lambda'_j} \leq \beta_{ij} \leq 1$. 特别地, 当 $T_{ij} = s_0$ 时, $\beta_{ij} = [1/(\tau + 1)]^{\lambda'_j}$, 当 $T_{ij} = s_\tau$ 时, $\beta_{ij} = 1$.

性质 3 若 $R_{ij} > R_{ik}, R_{ik} > R_{ih}$, $i \in I, j, k, h \in J$, 则 $\alpha_{ij} > \alpha_{ik} > \alpha_{ih}$; 若 $T_{ij} > T_{lj}, T_{lj} > T_{tj}$, $i, l, t \in I$, $j \in J$, 则 $\beta_{ij} > \beta_{lj} > \beta_{tj}$.

性质 4 若 $\phi(R_{ij}) - \phi(R_{ik}) = \phi(R_{ih}) - \phi(R_{iu})$, $i \in I, j, k, h, u \in J$, 且 $R_{ij} > R_{ik}, R_{ih} > R_{iu}, R_{ij} > R_{ih}$, 则

(i) 当 $0 < \lambda_i < 1$ 时, $\alpha_{ij} - \alpha_{ik} < \alpha_{ih} - \alpha_{iu}$;

(ii) 当 $\lambda_i = 1$ 时, $\alpha_{ij} - \alpha_{ik} = \alpha_{ih} - \alpha_{iu}$;

(iii) 当 $\lambda_i > 1$ 时, $\alpha_{ij} - \alpha_{ik} > \alpha_{ih} - \alpha_{iu}$.

性质 5 若 $\phi(T_{ij}) - \phi(T_{lj}) = \phi(T_{tj}) - \phi(T_{rj})$, $i, l, t, r \in I, j \in J$, 且 $T_{ij} > T_{lj}, T_{tj} > T_{rj}, T_{ij} > T_{tj}$, 则

(i) 当 $0 < \lambda'_j < 1$ 时, $\beta_{ij} - \beta_{lj} < \beta_{tj} - \beta_{rj}$;

(ii) 当 $\lambda'_j = 1$ 时, $\beta_{ij} - \beta_{lj} = \beta_{tj} - \beta_{rj}$;

(iii) 当 $\lambda'_j > 1$ 时, $\beta_{ij} - \beta_{lj} > \beta_{tj} - \beta_{rj}$.

4 满意公平稳定匹配

匹配的满意性、公平性和稳定性是衡量双边匹配方案优劣的重要依据. 匹配的满意性可以使双边主体获得满意的匹配主体, 匹配的公平性能够降低双边主体的利益冲突, 匹配的稳定性能够维系双边主体稳定的匹配关系. 下面给出满意匹配、公平匹配和稳定匹配的定义.

设 $D = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\xi\}$ 是双边匹配方案集, 其中, $\xi \geq 2$, x_{ij} 是 0-1 变量, 当 $x_{ij} = 0$ 时, 表示 X_i 和 Y_j 不匹配, 当 $x_{ij} = 1$ 时, 表示 X_i 和 Y_j 匹配.

定义 3 若 $\mu \in D$, $f(\mu) = \max\{f(\mu_k) | \mu_k \in D\}$, 则

(i) 当 $f(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$ 时, 称 μ 是 X 方满意匹配方案, 此时记 $f_X(\mu_k) \triangleq f(\mu_k)$;

(ii) 当 $f(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij}$ 时, 称 μ 是 Y 方满意匹配方案, 此时记 $f_Y(\mu_k) \triangleq f(\mu_k)$;

(iii) 当 $f(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) x_{ij}$ 时, 称 μ 是双边满意匹配方案, 此时记 $f_{X+Y}(\mu_k) \triangleq f(\mu_k)$.

在定义 3 中, (i) 和 (ii) 是单边满意匹配, 称 $f_X(\mu_k)$ 和 $f_Y(\mu_k)$ 为单边匹配满意度. 单边满意匹配的含义是: 在双边匹配方案集中, 使得 X 或 Y 方匹配主体满意度之和最大的匹配方案. (iii) 是双边满意匹配, 称 $f_{X+Y}(\mu_k)$ 为双边匹配满意度. 双边满意匹配的含义是: 在双边匹配方案集中, 使得双边匹配主体满意度之和最大的匹配方案.

定义 4 若 $\mu \in D$, $g(\mu) = \min\{g(\mu_k) | \mu_k \in D\}$, 其中, $g(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij}$, 称 μ 是双边公平匹配方案, 称 $g(\mu_k)$ 为双边匹配公平度.

双边公平匹配的含义是: 在双边匹配方案集中, 使得双边匹配主体满意度的偏差之和最小的匹配方案.

定义 5 若 $\mu \in D$, 对 $\forall X_i \in X, Y_j \in Y, R_{ij}, R_{ik} \in R_i, T_{ij}, T_{lj} \in T_j$, 满足下列条件之一

(i) $\exists X_l \in X, Y_k \in Y$, 使得 $\mu(X_i) = Y_k, \mu(Y_j) = X_l$, 且 $R_{ij} > R_{ik}, T_{ij} > T_{lj}$;

(ii) $\exists Y_k \in Y$, 使得 $\mu(X_i) = Y_k, \mu(Y_j) = Y_j$, 且 $R_{ij} > R_{ik}$;

(iii) $\exists X_l \in X$, 使得 $\mu(X_i) = X_l, \mu(Y_j) = X_l$, 且 $T_{ij} > T_{lj}$,

称 X_i 和 Y_j 是阻碍稳定对.

在定义 5 中, (i) 是针对 X_i 和 Y_j 均匹配的情形, 其含义是: 相对于当前的匹配主体 Y_k 和 X_l , 则 X_i 更偏好于 Y_j , 且 Y_j 也更偏好于 X_i , 即 X_i 和 Y_j 更愿意匹配. (ii) 和 (iii) 是针对 X_i 和 Y_j 中的一方匹配, 而另一方未匹配的情形. (ii) 的含义是: 相对于当前的匹配主体 Y_k , 则 X_i 更偏好于 Y_j , 即 X_i 更愿意与 Y_j 匹配, 又 $(Y_j) = Y_j$, 根据注 1, 匹配获得的满意度高于未匹配的满意度, 因此, Y_j 也愿意与 X_i 匹配. (iii) 的含义是: 相对于当前的匹配主体 X_l , 则 Y_j 更偏好于 X_i , 即 Y_j 更愿意与 X_i 匹配, 又 $(X_i) = X_i$, 同理, 根据注 1, 则 X_i 也愿意与 Y_j 匹配. 因此, 在完全信息的情形下 X_i 和 Y_j 分别会抛弃当前的匹配主体而匹配在一起, 从而使原匹配方案失效.

定义 6 若双边匹配 μ 中不存在阻碍稳定对, 称 μ 是稳定双边匹配.

稳定双边匹配的含义是: 对于 μ 中的任意双边匹配对 (X_i, Y_j) , 主体 X_i 除当前的匹配主体 Y_j 以外及主体 Y_j 除当前的匹配主体 X_i 以外, 他们都无法找到其他的匹配主体, 使得重新匹配后每个主体获得的满意度均高于现有各自的满意度.

为了便于理解满意匹配、公平匹配和稳定匹配, 下面给出一个例子.

例 1 在双边匹配问题中, X 方主体集为 $\{X_1, X_2, X_3\}$, Y 方主体集为 $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, 双边主体的语言偏好矩阵分别为

$$[R_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_0 \\ s_1 & s_3 & s_2 & s_0 \\ s_0 & s_2 & s_4 & s_1 \end{bmatrix}, [T_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} s_3 & s_1 & s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 & s_0 & s_1 \\ s_0 & s_2 & s_2 & s_0 \end{bmatrix},$$

其中, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\} = \{\text{很差, 差, 一般, 好, 很好}\}$ 是语言术语集.

利用式 (1) 和式 (2) 计算获得双边主体的满意度矩阵分别为

$$[\alpha_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 1.0 & 0.4 \end{bmatrix}, [\beta_{ij}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.8 & 0.6 \\ 1.0 & 0.8 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda_i = \lambda'_j = 1.0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$.

经过优化匹配, 获得 4 个双边匹配方案 μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 , 具体如下:

$$\mu_1 = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (Y_4, Y_4)\};$$

$$\mu_2 = \{(X_1, Y_3), (X_2, Y_1), (X_3, Y_2), (Y_4, Y_4)\};$$

$$\mu_3 = \{(X_1, Y_3), (X_2, Y_2), (X_3, Y_4), (Y_1, Y_1)\};$$

$$\mu_4 = \{(X_1, Y_3), (X_2, Y_2), (X_3, Y_1), (Y_4, Y_4)\}.$$

根据定义 3 和定义 4, 计算获得上述双边匹配方案对应的单边匹配满意度、双边匹配满意度和双边匹配

公平度分别为

$$\begin{aligned} f_X(\mu_1) &= 2.2, f_Y(\mu_1) = 2.2, f_{X+Y}(\mu_1) = 4.4, g(\mu_1) = 0.8; \\ f_X(\mu_2) &= 1.8, f_Y(\mu_2) = 2.4, f_{X+Y}(\mu_2) = 4.2, g(\mu_2) = 0.6; \\ f_X(\mu_3) &= 2.0, f_Y(\mu_3) = 1.8, f_{X+Y}(\mu_3) = 3.8, g(\mu_3) = 0.2; \\ f_X(\mu_4) &= 1.8, f_Y(\mu_4) = 1.8, f_{X+Y}(\mu_4) = 3.6, g(\mu_4) = 0.0. \end{aligned}$$

由定义 3 和定义 4 知, μ_1 是 X 方满意匹配方案, μ_2 是 Y 方满意匹配方案, μ_1 是双边满意匹配方案, μ_4 是双边公平匹配方案. 对于 μ_1 , 在 X_1 的偏好列表中存在 $R_{13} > R_{11}$, 即相对于当前匹配主体 Y_1 , X_1 更偏好于 Y_3 , 在 Y_3 的偏好列表中存在 $T_{13} > T_{33}$, 即相对于当前匹配主体 X_3 , Y_3 更偏好于 X_1 , 依据定义 5, 则 X_1 和 Y_3 是阻碍稳定对, 依据定义 6, 则双边匹配 μ_1 是不稳定的. 同理可得, μ_2 中存在阻碍稳定对 X_2 和 Y_2 , μ_4 中存在阻碍稳定对 X_3 和 Y_4 , μ_3 中不存在阻碍稳定对, 因此, 双边匹配 μ_2 和 μ_4 是不稳定的, μ_3 是稳定的.

从例 1 可以看出: 在双边匹配中, 若仅考虑匹配的满意性, 则双边匹配方案的公平性和稳定性可能较差 (μ_1 和 μ_2); 若仅考虑匹配的公平性, 则双边匹配方案的满意性和稳定性可能较差 (μ_4); 若仅考虑匹配的稳定性, 则双边匹配方案的满意性和公平性可能较差 (μ_3). 因此, 寻求兼具满意性、公平性和稳定性的双边匹配方案具有重要的理论意义和现实意义.

5 双边匹配方法

5.1 匹配优化模型

考虑双边匹配的满意性、公平性和稳定性, 以最大化双边主体的匹配满意度和最小化双边主体的匹配公平度为目标, 建立双边匹配多目标优化模型:

$$\max \quad Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

$$\max \quad Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij} \quad (4)$$

$$\min \quad Z_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij} \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$x_{ij} + \sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} + \sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

在上述模型中, 式 (3) 表示最大化 X 方主体的匹配满意度; 式 (4) 表示最大化 Y 方主体的匹配满意度; 式 (5) 表示双边匹配的公平性; 式 (6) 表示每个 X 方主体至多与 Y 方中的一个主体匹配; 式 (7) 表示每个 Y 方主体至多与 X 方中一个主体匹配; 式 (8) 表示稳定匹配约束条件^[22,23]; 式 (9) 表示双边匹配数量约束条件.

定理 1 若双边匹配 μ 满足约束条件式 (8), 则 μ 是稳定双边匹配.

证明 考虑定理 1 的逆否命题与原命题的同真性, 下面证明定理 1 的逆否命题是真命题. 即若双边匹配 μ 是不稳定的, 则 μ 不满足约束条件式 (8).

因为 μ 是不稳定的, 依据定义 6, 则 μ 中至少存在一个阻碍稳定对. 设 X_i 和 Y_j 是 μ 中的任意一个阻碍稳定对, 此时有 $x_{ij} = 0$.

(i) 当 $\exists X_l \in X, Y_k \in Y$, 使得 $\mu(X_i) = Y_k, \mu(Y_j) = X_l$, 且 $R_{ij} > R_{ik}, T_{ij} > T_{lj}$ 时, 因为 $\mu(X_i) = Y_k$,

且 $R_{ij} > R_{ik}$, 故 $\sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} = 0$, 又 $\mu(Y_j) = X_l$, 且 $T_{ij} > T_{lj}$, 则 $\sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$, 故 $x_{ij} + \sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} + \sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$ 成立, 即 μ 不满足式 (8);

(ii) 当 $\exists Y_k \in Y$, 使得 $\mu(X_i) = Y_k$, $\mu(Y_j) = Y_j$, 且 $R_{ij} > R_{ik}$ 时, 因为 $\mu(Y_j) = Y_j$, 故 $\sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$, 又 $\mu(X_i) = Y_k$, 且 $R_{ij} > R_{ik}$, 则 $\sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} = 0$, 故 $x_{ij} + \sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} + \sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$ 成立, 即 μ 不满足式 (8);

(iii) 当 $\exists X_l \in X$, 使得 $\mu(X_i) = X_i$, $\mu(Y_j) = X_l$, 且 $T_{ij} > T_{lj}$ 时, 因为 $\mu(X_i) = X_i$, 故 $\sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} = 0$, 又 $\mu(Y_j) = X_l$, 且 $T_{ij} > T_{lj}$, 则 $\sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$, 故 $x_{ij} + \sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} + \sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} = 0$ 成立, 即 μ 不满足式 (8).

综上, 若双边匹配 μ 是不稳定的, 则 μ 不满足约束条件式 (8) 成立, 故定理 1 得证.

5.2 模型求解

在模型 (3)~(9) 中, 目标函数的量纲量级相同, 采用理想点法将双边匹配多目标优化模型转化为如下的单目标规划模型:

$$\min \quad Z = (\omega_1 |Z_1 - Z_1^*|^p + \omega_2 |Z_2 - Z_2^*|^p + \omega_3 |Z_3 - Z_3^*|^p)^{1/p} \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

$$x_{ij} + \sum_{k: R_{ik} > R_{ij}} x_{ik} + \sum_{l: T_{lj} > T_{ij}} x_{lj} \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

其中, $1 \leq p \leq +\infty$, Z_1^* 和 Z_2^* 分别是目标函数 Z_1 和 Z_2 在约束条件 (6)~(9) 下的最大值, Z_3^* 是目标函数 Z_3 在约束条件 (6)~(9) 下的最小值, ω_1 , ω_2 和 ω_3 分别是目标函数 Z_1 , Z_2 和 Z_3 的权重系数, 满足 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, $0 \leq \omega_1, \omega_2, \omega_3 \leq 1$.

(i) 当 $p = 1$ 时, 目标函数 Z 中的距离为曼哈顿距离, 此时目标函数 Z 可化简为

$$Z = \omega_1 Z_1^* + \omega_2 Z_2^* + \omega_3 Z_3 - \omega_1 Z_1 - \omega_2 Z_2 - \omega_3 Z_3^*.$$

(ii) 当 $p = 2$ 时, 目标函数 Z 中的距离为欧几里得距离, 此时目标函数 Z 可化简为

$$Z = \sqrt{\omega_1 (Z_1 - Z_1^*)^2 + \omega_2 (Z_2 - Z_2^*)^2 + \omega_3 (Z_3 - Z_3^*)^2}.$$

(iii) 当 $p \rightarrow +\infty$ 时, 目标函数 Z 中的距离为切比雪夫距离, 此时目标函数 Z 可化简为

$$Z = \max\{\omega_1 |Z_1 - Z_1^*|, \omega_2 |Z_2 - Z_2^*|, \omega_3 |Z_3 - Z_3^*|\}.$$

在模型 (10)~(14) 中, 当双边匹配问题的规模较小时, 即数值 m 和 n 较小时, 可以采用整数规划的方法进行求解^[10,14]; 当双边匹配问题的规模较大时, 即数值 m 和 n 较大时, 可以使用优化软件包 LINGO、MATLAB 等求解或设计智能算法和启发式算法等进行求解.

综上所述, 基于语言偏好信息的满意公平稳定双边匹配方法的计算步骤如下:

步骤 1 首先利用式 (1) 计算 X 方主体的匹配满意度, 构建满意度矩阵 $[\alpha_{ij}]_{m \times n}$;

步骤 2 利用式 (2) 计算 Y 方主体的匹配满意度, 构建满意度矩阵 $[\beta_{ij}]_{m \times n}$;

步骤 3 建立双边匹配多目标优化模型 (3)~(9);

步骤 4 采用理想点法将模型 (3)~(9) 转化为模型 (10)~(14);

步骤 5 通过求解模型 (10)~(14) 获得双边匹配结果.

6 算例分析

考虑技术知识服务中的供需匹配问题. CIPIC 是一家专门从事为高校科研机构和企业提供专利技术供需信息和撮合服务的第三方非营利性平台. 2017 年 6 月 CIPIC 收到 4 家高校课题组 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 关于某类发明专利的转让信息和 6 家企业 $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6\}$ 关于该类发明专利的需求信息. 高校课题组使用语言术语集 S , 依据企业竞争力、专利转让价格、专利转化速度和企业信誉等指标对需求企业进行综合评价, 给出 6 家企业的语言偏好信息如表 1 所示. 需求企业使用语言术语集 S , 依据专利的潜在价值、转让价格、市场前景和转让年限等指标对高校课题组进行综合评价, 给出 4 家课题组的语言偏好信息如表 2 所示. CIPIC 依据双方的偏好进行优化匹配. $S = \{s_\kappa | \kappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{\text{最差, 极差, 很差, 差, 一般, 好, 很好, 极好, 最好}\}$ 是事先给定的语言术语集.

表 1 高校课题组给出的关于需求企业的语言偏好信息

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	s_5	s_4	s_7	s_3	s_8	s_6
X_2	s_3	s_7	s_4	s_6	s_5	s_2
X_3	s_3	s_1	s_2	s_6	s_4	s_5
X_4	s_7	s_5	s_4	s_3	s_6	s_2

表 2 需求企业给出的关于高校课题组的语言偏好信息

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	s_7	s_4	s_3	s_5	s_6	s_6
X_2	s_4	s_5	s_5	s_7	s_4	s_3
X_3	s_8	s_6	s_6	s_6	s_5	s_7
X_4	s_6	s_7	s_4	s_4	s_7	s_5

6.1 计算过程

为解决上述双边匹配问题, 采用前文提出的匹配方法, 下面给出计算过程和结果.

经过调研取 $\lambda_i = \lambda'_j = 0.65, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 首先利用式 (1) 和式 (2) 将双边主体的语言偏好信息转化为匹配满意度, 获得双边主体的满意度矩阵分别为

$$[\alpha_{ij}]_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0.7683 & 0.6825 & 0.9263 & 0.5903 & 1.0000 & 0.8493 \\ 0.5903 & 0.9263 & 0.6825 & 0.8493 & 0.7683 & 0.4896 \\ 0.5903 & 0.3762 & 0.4896 & 0.8493 & 0.6825 & 0.7683 \\ 0.9263 & 0.7683 & 0.6825 & 0.5903 & 0.8493 & 0.4896 \end{bmatrix},$$

$$[\beta_{ij}]_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0.9263 & 0.6825 & 0.5903 & 0.7683 & 0.8493 & 0.8493 \\ 0.6825 & 0.7683 & 0.7683 & 0.9263 & 0.6825 & 0.5903 \\ 1.0000 & 0.8493 & 0.8493 & 0.8493 & 0.7683 & 0.9263 \\ 0.8493 & 0.9263 & 0.6825 & 0.6825 & 0.9263 & 0.7683 \end{bmatrix}.$$

建立双边匹配优化模型 (3)~(9), 取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/3$, 采用理想点法将双边匹配优化模型 (3)~(9) 转化为单目标规划模型 (10)~(14). 分别令 $p = 1, 2, +\infty$, 并使用 LINGO11.0 软件求解得

$$x_{15} = x_{22} = x_{34} = x_{41} = 1, \text{ 其余的 } x_{ij} = 0.$$

获得双边匹配方案: 课题组 X_1 和企业 Y_5 匹配, 课题组 X_2 和企业 Y_2 匹配, 课题组 X_3 和企业 Y_4 匹配, 课题组 X_4 和企业 Y_1 匹配, 企业 Y_3 和 Y_6 未匹配.

6.2 结果比较

为了说明本文方法的合理性和有效性, 下面采用文献 [16] 的方法对上述双边匹配问题进行求解, 获得的双边匹配结果如表 3 所示. 由于文献 [16] 方法未构造匹配满意度函数, 因此, 无法比较双边匹配的公平性. 为了进一步说明本文方法的合理性和有效性, 下面在不考虑匹配的公平性和稳定性的情形下, 以最大化双边主体的匹配满意度为目标, 建立双边匹配优化模型 M-1.

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{M-1}$$

类似地, 采用理想点法 ($\omega_1 = \omega_2 = 1/2$) 求解模型 M-1, 获得的双边匹配结果如表 3 所示.

从表 3 可以看出: (i) 文献 [16] 方法和模型 M-1 获得的双边匹配方案相同, 本文方法获得的双边匹配方案与文献 [16] 以及模型 M-1 的方案不完全一致. 在文献 [16] 和模型 M-1 的方案中 X_2 与 Y_4 匹配, X_3 与 Y_6 匹配, Y_2 和 Y_3 未匹配. 在本文的匹配方案中 X_2 与 Y_2 匹配, X_3 与 Y_4 匹配, Y_3 和 Y_6 未匹配. (ii) 本文方法获得的双边匹配方案在匹配的稳定性上优于文献 [16] 和模型 M-1. 在文献 [16] 和模型 M-1 的匹配方案中, 存在 $R_{22} > R_{24}$ (表 1), 且 $\mu(Y_2) = Y_2$, 即相对于当前的匹配主体 Y_4 , 主体 X_2 更偏好于 Y_2 , 且 Y_2 未匹配, 根据定义 5 和注 1, 则 X_2 和 Y_2 是阻碍稳定对, 由定义 6 知, 该匹配方案是不稳定的. 在本文的匹配方案中不存在阻碍稳定对, 因此, 是稳定双边匹配. (iii) 本文方法获得的双边匹配方案在匹配的公平性上优于模型 M-1. 本文匹配方案的双边匹配满意度略低于模型 M-1 匹配方案的双边匹配满意度, 但前者的双边匹配公平性优于后者. 综上分析表明了本文方法的合理性和有效性.

表 3 不同方法对应的双边匹配结果

方法	双边匹配方案	稳定性	$f_X(\mu)$	$f_Y(\mu)$	$f_{X+Y}(\mu)$	$g(\mu)$
本文	$\{(X_1, Y_5), (X_2, Y_2), (X_3, Y_4), (X_4, Y_1), (Y_3, Y_3), (Y_6, Y_6)\}$	稳定	3.7019	3.3162	7.0181	0.3857
M-1	$\{(X_1, Y_5), (X_2, Y_4), (X_3, Y_6), (X_4, Y_1), (Y_2, Y_2), (Y_3, Y_3)\}$	不稳定	3.5439	3.5512	7.0951	0.4627
文献 [16]	$\{(X_1, Y_5), (X_2, Y_4), (X_3, Y_6), (X_4, Y_1), (Y_2, Y_2), (Y_3, Y_3)\}$	不稳定	—	—	—	—

7 结论

本文针对严格完全语言偏好信息下的双边匹配问题, 给出了满意匹配、公平匹配和稳定匹配的定义, 考虑稳定匹配约束条件, 建立双边匹配模型, 并采用理想点法求解双边匹配多目标优化模型. 与已有方法相比, 本文提出一种兼具满意性、公平性和稳定性的双边匹配方法, 弥补了已有研究单纯考虑匹配满意性的不足. 同时, 本文为解决语言偏好信息下的双边匹配问题提供了一种新的思路和途径. 进一步的工作是从匹配主体心理行为的角度, 研究基于语言偏好信息的双边匹配问题.

参考文献

- [1] Irving R W, Manlove D F, Scott S. The stable marriage problem with master preference lists[J]. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(15): 2959–2977.
- [2] Roth A E, Sönmez T. The Boston public school match[J]. American Economic Review, 2005, 95(2): 368–371.
- [3] Azevedo E M. Imperfect competition in two-sided matching markets[J]. Games & Economic Behavior, 2014, 83(1): 207–223.
- [4] Sørensen M. How smart is smart money? A two-sided matching model of venture capital[J]. The Journal of Finance, 2007, 62(6): 2725–2762.
- [5] Jiang Z Z, Fan Z P, Ip W H, et al. Fuzzy multi-objective modeling and optimization for one-shot multi-attribute exchanges with indivisible demand[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(3): 708–723.
- [6] Chen X, Li Z, Fan Z P, et al. Matching demanders and suppliers in knowledge service: A method based on fuzzy axiomatic design[J]. Information Sciences, 2016, 346–347: 130–145.
- [7] 乐琦. 直觉模糊环境下考虑匹配意愿的双边匹配决策 [J]. 中国管理科学, 2017, 25(6): 161–168.
Yue Q. Two-sided matching decision considering matching aspiration under the intuitionistic fuzzy circumstance[J]. Chinese Journal of Management Science, 2017, 25(6): 161–168.

- [8] Gale D, Shapley L S. College admissions and the stability of marriage[J]. The American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9–15.
- [9] Roth A E. Common and conflicting interests in two-sided matching markets[J]. European Economic Review, 1985, 27(1): 75–96.
- [10] 樊治平, 乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21–34.
Fan Z P, Yue Q. Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21–34.
- [11] 梁海明, 姜艳萍, 孔德财. 考虑偏好序的多满意稳定导向双边匹配决策方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(6): 1535–1546.
Liang H M, Jiang Y P, Kong D C. Decision-making method on multiple targets of satisfied and stable two-sided matching considering the preference ordering[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(6): 1535–1546.
- [12] Erdil A, Ergin H. Two-sided matching with indifferences[J]. Journal of Economic Theory, 2017, 171(9): 268–292.
- [13] 乐琦, 樊治平. 基于不完全序值信息的双边匹配决策方法 [J]. 管理科学学报, 2015, 18(2): 23–35.
Yue Q, Fan Z P. Decision method for two-sided matching based on incomplete ordinal number information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(2): 23–35.
- [14] 姜艳萍, 孔德才, 袁铎宁. 基于序区间偏好信息的双边稳定匹配方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(8): 2152–2161.
Jiang Y P, Kong D C, Yuan D N. Two-sided stable matching decision-making method with ordinal interval preference[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(8): 2152–2161.
- [15] Fan Z P, Li M Y, Zhang X. Satisfied two-sided matching: A method considering elation and disappointment of agents[J]. Soft Computing, 2017, 15(1): 1–15.
- [16] 乐琦. 基于两粒度语言评价信息的双边匹配决策 [J]. 运筹与管理, 2016, 25(1): 100–104.
Yue Q. Two-sided matching decision with two-granularity linguistic evaluation information[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(1): 100–104.
- [17] Yue Q, Peng Y S, Yue B W, et al. Two-sided matching decision under multi-granularity uncertain linguistic environment[J]. Advanced Science and Technology Letters, 2015, 111(8): 35–41.
- [18] Yue Q. Two-sided matching under uncertain and incomplete linguistic environment[J]. Advanced Science and Technology Letters, 2014, 53(2): 185–189.
- [19] Yue Q. Two-sided matching decision with two-granularity uncertain and incomplete linguistic terms[J]. International Journal of Multimedia & Ubiquitous Engineering, 2015, 10(2): 121–128.
- [20] Sethuraman J, Teo C P, Qian L. Many-to-one stable matching: Geometry and fairness[J]. Mathematics of Operations Research, 2006, 31(3): 581–596.
- [21] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessment[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1996, 78(1): 73–87.
- [22] Vate J H V. Linear programming brings marital bliss[J]. Operations Research Letters, 1989, 8(3): 147–153.
- [23] Roth A E, Rothblum U G. Stable matchings optimal assignment and linear programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(4): 803–828.